第 41 卷　第 1 期
2023 年 3 月

天　文　学　进　展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 41,　No. 1
Mar., 2023

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2023.01.08

针对低轨星座的空间信号测距误差投影系数确定

田秋凝[1]，曹月玲[2]，杨建华[2,3]，刘金获[2,3]，项　宇[4]，
杨　祚[4]，吕　昊[4]，彭汉兵[4]

(1. 北京遥测技术研究所，北京　100076；2. 中国科学院　上海天文台，上海　200030；3. 中国科学院大学，北京　100049；4. 北京卫星导航中心，北京　100094)

摘要： 随着低轨星座建设的不断推进，计算卫星空间信号测距误差 (signal in space range error, SISRE) 的面向对象不再局限于全球卫星导航系统 (Global Navigation Satellite System, GNSS) 的地面用户，还包括 GNSS 的低轨星载用户和低轨导航系统地面用户。为更好地支持基于低轨星座 SISRE 的解算，根据 SISRE 的计算原理，分别研究了低轨星载用户和低轨卫星地面用户的 SISRE 误差投影系数的特征。计算结果显示，GNSS 卫星对地面用户的误差投影系数并不适用于低轨星载用户及低轨导航星座地面用户。当低轨卫星轨道高度由 2 000 km 降低至300 km 时，GNSS 卫星对低轨星载接收机的轨道径向误差投影系数由 0.96 增加到 0.98，轨道切法平面误差投影系数由 0.20 降低至 0.15；低轨卫星对地面用户的轨道径向误差投影系数从 0.72 降至 0.37，轨道切法平面误差投影系数从 0.49 增加至 0.66。上述结果可为未来低轨卫星相关的空间信号测距误差分析以及低轨完好性研究提供重要参考。

关　键　词： GNSS；低轨星座；空间信号测距误差；误差投影系数

中图分类号： P228　　　　**文献标识码：** A

1　引　言

GNSS 服务精度是评估卫星导航系统服务性能的重要指标，也是表征 GNSS 系统的核心竞争力[1]。GNSS 系统服务精度可通过用户等效测距精度 (user equivalent range error, UERE) 和精度几何因子 (dilution of precision, DOP) 计算。其中，精度几何因子由卫星星座构型决定[2]；用户等效测距误差包括卫星导航电文误差、大气延迟模型修正误差以及接收

收稿日期： 2022-04-02；　**修回日期：** 2022-04-14

资助项目： 国家自然科学基金 (41674041, 11203059, 12173072)，国家重点研究计划“协同精准定位项目” (2016YFB0501900)

通讯作者： 曹月玲，caoyueling@shao.ac.cn

机测量误差在测距方向上投影。其中，接收机测量误差主要包括测距噪声和多路径误差，反映 GNSS 接收机设备性能[3]；大气延迟模型修正误差主要包括电离层延迟模型修正误差和对流层延迟模型修正误差；卫星导航电文误差主要包括广播星历误差和广播钟差参数误差，可通过 SISRE 反映[4]。

SISRE 描述了卫星广播星历误差和钟差参数误差对服务区域内用户视线方向的投影均值，可通过广播的导航电文与精密产品计算卫星广播星历误差和钟差参数误差，再利用投影系数计算得到 SISRE[5]。SISRE 是 GNSS 研究的热点之一[6–9]，目前欧洲伽利略卫星导航系统 (Galileo Satellite Navigation System, Galileo)、俄罗斯全球定位系统 (Global Navigation Satellite System, GLONASS) 和北斗三号卫星导航系统 (BeiDou Navigation Satellite System-3, BDS-3) 的 SISRE 分别为 0.14 m, 2.59 m 和 0.35 m；美国全球定位系统 (Global Positioning System, GPS) 的 SISRE 根据星载原子钟的不同，分别为 0.35 m 和 1.27 m。各 GNSS 系统径向和切法平面的广播星历误差、钟差参数误差及综合的 SISRE 评估结果参见表 1[5, 7]。

表 1 不同 GNSS 的空间信号测距误差 m

卫星系统	径向	切法平面	钟差	SISRE
GPS	0.20	1.3	铷钟 0.2	0.35
			铯钟 (IIF) 1.25	1.27
Galileo	0.10	0.25	0.14	0.14
GLONASS	0.41	2.28	2.48	2.59
BDS-3	0.07	0.58	0.46	0.35

空间信号测距误差投影系数，包括轨道径向误差投影系数和轨道切法平面误差投影系数，是计算空间信号测距误差[10, 11]和卫星完好性参数[12, 13]的重要系数。Montenbruck 等人给出了 GPS, GLONASS, Galileo 和 BDS 等 GNSS 系统的 SISRE 投影系数，这些系数计算与卫星轨道高度、卫星下行 L 波段天线的波束角以及用户的平均海拔高度有关[2, 11]。目前，各 GNSS 系统接口协议提供的用于计算 GNSS 的 SISRE 投影系数仅支持在大地水准面上的用户[10, 11]。随着低轨卫星相关技术的日益发展，低轨导航增强系统已成为下一代卫星导航系统发展的重要方向[14, 15]。马斯克的星链计划发射上万颗低轨卫星提供通讯和导航服务[16]。欧洲开普勒 (Kepler) 计划显示，欧洲下一代导航系统的星座由中低轨卫星混合构成[17]。中国也计划利用低轨卫星增强 GNSS 的服务能力，发展“鸿雁”、“微厘一号”等低轨星座。

传统的面向地面用户用于计算 GNSS 的 SISRE 投影系数不能满足低轨相关的用户需求，因此，急需针对低轨卫星导航用户提供一套适应于低轨卫星的空间信号测距误差投影系数，以及低轨星载接收机用户计算 GNSS 的 SISRE 投影系数。目前，大部分低轨导航星座尚处在论证阶段，关于低轨卫星自身的 SISRE 误差投影系数计算还未充分开展研究，本文将根据 SISRE 的计算原理，对 GNSS 卫星低轨星载用户的 SISRE 误差投影系数、不同轨道高度的低轨卫星对地面用户的 SISRE 误差投影系数展开研究，为低轨卫星的发展提供重要支撑。

本文首先对空间信号测距误差和误差投影系数的计算进行推导，并验证了算法的有效性；以空间信号测距误差投影系数计算方法为依据，分别研究了低轨用户的 GNSS 卫星空间信号测距误差投影系数以及低轨卫星对地面用户的空间信号测距误差投影系数。

2　地面用户的 GNSS 卫星空间信号误差投影系数

空间信号测距误差的概念可追溯到 GPS 的早期计划[17]，其原理为卫星端误差的地理平均[2]。首先，假设用户平均分散在某一片面 S 上，则卫星端误差在该区域内的用户视线方向上的瞬时投影的平均值可表示为：

$$SISRE = \frac{\int Err \mathrm{d}s}{\int \mathrm{d}s} \quad , \tag{1}$$

其中，Err 为广播星历误差和钟差参数误差在卫星到用户方向上的投影。对应地，$SISRE$ 的均方根误差 $RMS(SISRE)$ 可表示为[2]：

$$RMS(SISRE) = \sqrt{\frac{\int Err^2 \mathrm{d}s}{\int \mathrm{d}s}} \quad . \tag{2}$$

卫星端误差由卫星钟差参数误差和卫星轨道误差构成，定义卫星端轨道误差向量为 $\boldsymbol{E}$，钟差参数误差为 T，卫星指向用户的单位矢量为 $\boldsymbol{l}$。假设地球近似为球形，且用户平均分散在地球表面 S 上。卫星端误差在轨道参考系下的投影关系见图 1，则 $RMS(SISRE)$ 可进一步表示为：

$$\begin{aligned} RMS(SISRE) &= \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_{\max}} (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}-cT)^2 r_{\mathrm{E}}^2 \sin\alpha \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_{\max}} r_{\mathrm{E}}^2 \sin\alpha \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta}} \\ &= \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_{\max}} (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}-cT)^2 \sin\alpha \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta}{2\pi(1-\sin\theta_{\max})}} \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

其中，图 1 的 O 为地心，轴 X 指向与卫星迹向相反的方向，轴 Y 指向卫星的法向，轴 Z 指向与卫星径向相反的方向，α 为以地心为顶点卫星与用户的夹角，β 为用户投影到 XOY 平面上与 X 轴的夹角，R_{S} 为卫星地心距，θ 为以卫星为顶点，用户和地心的夹角，$\theta_{\max}$ 为卫星视线与地球相切时得出。在轨道参考系下，$\boldsymbol{E}$ 可分解为径向轨道误差、迹向轨道误差和法向轨道误差，即

$$\boldsymbol{E} = (-\boldsymbol{e}_{\mathrm{C}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{A}}, -\boldsymbol{e}_{\mathrm{R}}) \quad , \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{e}_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{C}}$ 分别为轨道参考系下径向、迹向和法向的三个基向量。根据图 1 的几何关系可知，轨道参考系下的 $\boldsymbol{l}$ 可通过下式计算：

$$\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{SD}}{||\boldsymbol{SD}||} = \frac{(r_{\mathrm{E}}\sin\alpha\cos\beta,\ r_{\mathrm{E}}\sin\alpha\sin\beta,\ r_{\mathrm{E}}\cos\alpha - R_{\mathrm{S}})}{\sqrt{r_{\mathrm{E}}^2 + R_{\mathrm{S}}^2 - 2r_{\mathrm{E}}R_{\mathrm{S}}\cos\alpha}} \quad . \tag{5}$$

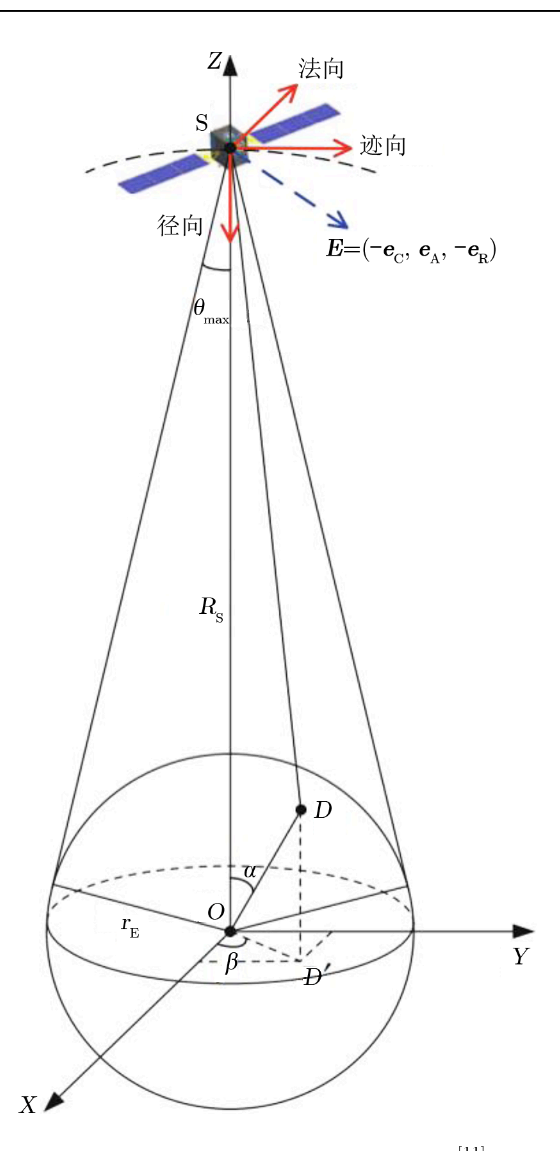


图 1 地面用户对卫星的观测示意图[11]

将公式 (4) 和公式 (5) 代入公式 (3)，可以得到：

$$RMS(SISRE) = \sqrt{\omega_R^2 e_R^2 - 2\omega_R c^2 T e_R + c^2 T^2 + \omega_{AC}^2 (e_A^2 + e_C^2)} \quad , \tag{6}$$

其中，ω_R 和 ω_{AC} 分别为轨道径向和切法平面误差投影系数[4]，计算公式如下：

$$\omega_R = \sqrt{\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_{max}} \left(\frac{r_E \cos\alpha - R_S}{\sqrt{r_E^2 + R_S^2 - 2r_E R_S \cos\alpha}} \right)^2 \sin\alpha \mathrm{d}\alpha}{1 - \sin\theta_{max}}} \quad , \tag{7}$$

$$\omega_{AC} = \sqrt{\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_{max}} \left(\frac{r_E \sin\alpha}{\sqrt{r_E^2+R_S^2-2r_E R_S \cos\alpha}}\right)^2 \sin\alpha d\alpha}{2(1-\sin\theta_{max})}} \quad . \tag{8}$$

在传统的 GNSS 空间信号测距误差投影系数计算中，通常假设用户处在 $r_E = 6\,371$ km 处。此时，如果知道 GNSS 卫星的高度，则可通过上述公式，计算出不同高度下的空间信号测距误差投影系数，结果见表 2。其中，ω_{R1} 和 ω_{AC1} 分别为采用式 (7) 和式 (8) 得到的轨道径向和切法平面误差投影系数，ω_{R2} 和 ω_{AC2} 为 Montenbruck 等人[2] 提出的轨道径向和切法平面误差投影系数。

表 2　地面相对于 GNSS 卫星空间信号测距误差投影系数[2]

卫星系统	卫星高度/km	θ_{max}	ω_{R1}	ω_{R2}	ω_{AC1}	ω_{AC2}
GPS	20 189	13.9	0.979 4	0.979	0.142 8	0.143
Galileo	23 229	12.4	0.983 5	0.984	0.127 7	0.128
GLONASS	19 069	14.5	0.977 4	0.977	0.149 3	0.149
BDS-3 MEO	21 529	13.2	0.981 4	0.981	0.135 8	0.136
BDS-3 IGSO/GEO	35 786	8.7	0.992 0	—	0.088 9	—

通过该方法计算的 GNSS 空间信号测距误差投影参数与 Montenbruck 等人[2] 的结果基本一致，从而验证了上述算法的可行性。由表 2 可知，GNSS 卫星的径向轨道误差投影系数接近于 1，切法平面方向误差投影系数小于 0.2，意味着 GNSS 径向轨道误差对地面用户的空间信号测距误差的影响显著大于切法平面对空间信号测距误差的影响。

3　地面用户的低轨卫星空间信号误差投影系数

为了便于地面用户分析不同低轨导航星座的空间信号测距误差特征，需要计算不同轨道高度低轨卫星对地面用户的空间信号测距误差投影系数。将不同低轨卫星的轨道设计高度代入式 (7) 和式 (8)，可获得低轨卫星相对于地面用户的轨道径向、切法平面测距误差投影系数。

以低轨卫星的轨道高度为变量，不同轨道高度低轨卫星对地面用户的 SISRE 投影系数相应有变化，如图 2 所示。图中，蓝色和橙色分别表示不同轨道高度低轨卫星的轨道径向和切法平面对地面用户 SISRE 误差投影系数。从图中可以看出，随着低轨卫星轨道高度变化，SISRE 误差投影系数存在明显的变化。当低轨卫星的轨道高度从 300 km 到 2 000 km 范围内逐渐增大，轨道径向误差对地面用户的投影系数从 0.374 变化到 0.716 4，不断变大；轨道切法平面误差对地面用户的投影系数从 0.656 变化到 0.493，不断减小。这说明随着低轨卫星轨道高度的增加，轨道径向误差对 SISRE 的影响越来越大，切法平面误差对 SISRE 的影响在降低。

通过与第 2 章中 GNSS 卫星对地面用户的 SISRE 误差投影系数比较发现，GNSS 卫星

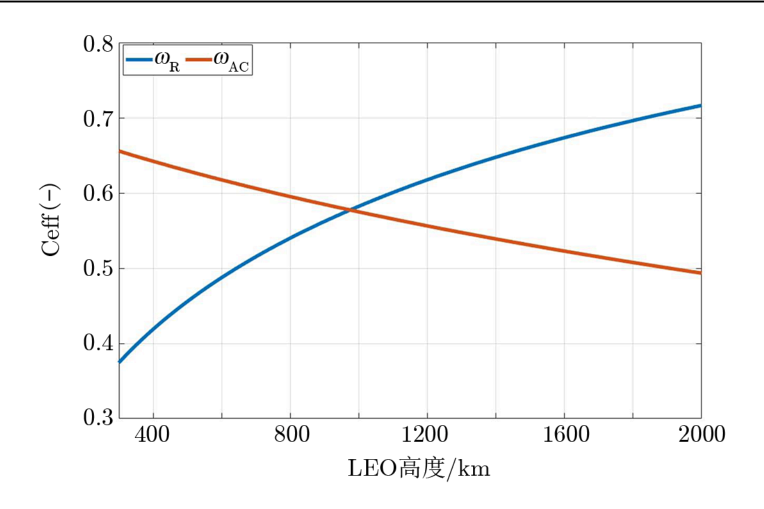


图 2 地面用户对不同低轨高度下的卫星空间信号测距误差投影系数

对地面用户的 SISRE 误差投影系数并不适用于低轨导航卫星对地面用户的 SISRE 计算，否则会给地面用户导航性能评估带来风险。对于地面用户而言，相比于传统的 GNSS 卫星，低轨卫星的切法向的误差对地面用户定位误差的影响更大。

我们选择四种常见的低轨星座轨道高度，计算了低轨卫星对地面用户的 SISRE 误差投影系数，包括卫星最大天顶角 θ_{max}、轨道径向误差投影系数 ω_R 和轨道切法平面误差投影系数 ω_{AC}，如表 3 所示，给出了地面用户对一些特定高度的低轨卫星空间信号测距误差投影系数。

表 3 地面用户对特定高度的低轨卫星的空间信号测距误差投影系数

卫星高度 /km	θ_{max}	ω_R	ω_{AC}
550 (星链)	67.0	0.472	0.623
970	60.2	0.577	0.578
1 100	58.5	0.601	0.565
1 209 (开普勒)	57.2	0.619	0.555

从图 2 和表 3 中可以看出，当低轨卫星轨道高度为 970 km 时，ω_R 与 ω_{AC} 基本相等；当卫星高度大于 970 km 时，ω_R 大于 ω_{AC}，此时卫星径向轨道误差对空间信号测距误差的贡献更大；当卫星高度小于 970 km 时，ω_R 小于 ω_{AC}，此时卫星切法向轨道误差对空间信号测距误差贡献更大。

4 低轨星载接收机的 GNSS 卫星空间信号误差投影系数

GNSS 卫星除了给地面用户导航外，还会给大量的低轨卫星提供导航服务。因此为了评估 GNSS 对低轨卫星的导航定位性能，需要计算低轨星载接收机的 GNSS 卫星空间信号误差投影系数。

假设低轨星载接收机用户分布于 300～2 000 km 的近圆轨道上，此时各物理量的计算不再是基于 $r_{\mathrm{E}}=6\,371$ km 得出，而是基于低轨卫星平均高度 r_{ref} 得出，即式 (7) 和式 (8) 中用低轨卫星的轨道高度 r_{ref} 替换 r_{E}，且 $\theta_{\max}$ 也同样随低轨卫星高度变化。图 3 给出了不同轨道高度下的低轨星载接收机用户的 GNSS 卫星空间信号测距误差投影系数，图 3 a) 为轨道径向误差投影系数，图 3 b) 为轨道切法平面误差投影系数。蓝色、红色和黄色斜线分别表示 GPS, Galileo 和 GLONASS 卫星对不同轨道高度的低轨星载接收机误差投影系数，紫色斜线表示 BDS MEO 卫星对不同轨道高度低轨星载接收机的误差投影系数，绿色斜线表示 BDS GEO/IGSO 卫星对不同轨道高度低轨星载接收机的误差投影系数。

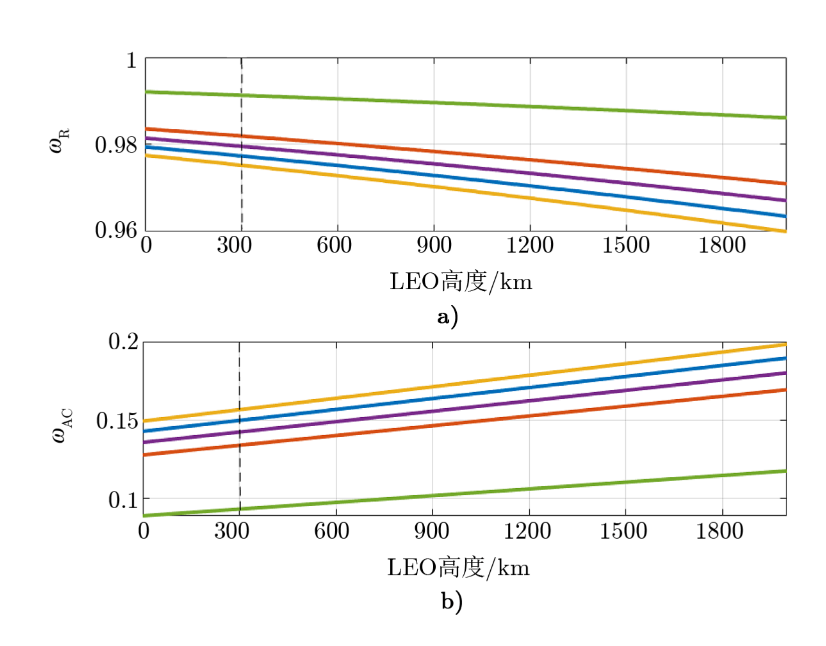


图 3 GNSS 卫星对不同高度下的低轨星载接收机的空间信号测距误差投影系数

由图 3 可知，随着低轨卫星的轨道高度不断变大，卫星轨道径向投影误差系数不断变小，切法平面误差投影系数不断变大。当低轨卫星轨道高度从 300 km 提高至 2 000 km 时，GNSS MEO 卫星的切法平面误差投影系数 ω_{AC} 可从 0.15 增加至 0.2。与地面用户相比，GNSS MEO 卫星切法平面方向的误差对低轨星载接收机用户的影响会更加显著。

以“微厘一号”和“鸿雁”低轨星载接收机为例，分别计算 GNSS 卫星对轨道高度为 970 km 和 1 100 km 的低轨星载接收机的空间信号测距误差投影系数，如表 4 和表 5 所示。

表 4 GNSS 卫星对 970 km 高度处低轨星载接收机的空间信号测距误差投影系数[2]

卫星系统	卫星高度/km	θ_{max}	ω_R	ω_{AC}
GPS	20 189	16.0	0.972 3	0.165 4
Galileo	23 229	14.4	0.977 9	0.147 8
GLONASS	19 069	16.8	0.969 6	0.172 9
BDS-3 MEO	21 529	15.3	0.975 0	0.157 2
BDS-3 IGSO/GEO	35 786	10.0	0.989 4	0.102 8

表 5 GNSS 卫星对 1 100 km 高度处低轨星载接收机的空间信号测距误差投影系数[2]

卫星系统	卫星高度/km	θ_{max}	ω_R	ω_{AC}
GPS	20 189	16.3	0.971 2	0.168 4
Galileo	23 229	14.6	0.977 1	0.150 5
GLONASS	19 069	17.1	0.968 5	0.176 1
BDS-3 MEO	21 529	15.5	0.974 1	0.160 0
BDS-3 IGSO/GEO	35 786	10.2	0.989 0	0.104 7

从表 4 和表 5 可知，与 MEO 卫星相比，GEO 和 IGSO 卫星的轨道径向误差对低轨星载接收机用户的 SISRE 影响更大，轨道切法平面误差对低轨星载接收机用户的 SISRE 影响较小。对于四大 GNSS 系统的 MEO 卫星，轨道径向、切法平面的误差投影系数差别不大，其中，Galileo 卫星的轨道切法平面误差对 SISRE 的影响相对较小，轨道径向误差对 SISRE 的影响相对较大。

5 结 论

本文从卫星空间信号测距误差原理出发，计算了 GNSS 卫星对地面用户和低轨用户的空间信号误差投影系数，以及不同轨道高度的低轨卫星对地面用户的空间信号误差投影系数。计算结果如下。

低轨卫星对地面用户的轨道径向误差投影系数，小于传统的 GNSS 卫星对地面用户的轨道径向误差投影系数，而低轨卫星对地面用户的轨道切法平面误差投影系数大于传统的 GNSS 卫星对地面用户的切法平面误差投影系数，说明地面用户对低轨卫星的切法平面轨道精度要求更高。

随着低轨卫星轨道高度由 300 km 增加到 20 000 km，在 GNSS 卫星对低轨星载接收机用户的空间信号测距误差计算中，轨道径向误差投影系数可由 0.98 降低至 0.96，轨道切法平面误差投影系数可由 0.15 增大到 0.20，其切法平面误差投影系数的变化大于径向投影系数。结合表 1 可知，Galileo 卫星的径向轨道误差略大于 BDS-3 卫星，但其切法平面方向上的轨道误差明显小于其他 GNSS 卫星。这意味着 Galileo 可能在未来的低轨应用中更有优势，也意味着随着低轨 GNSS 融合应用的发展，对卫星切法平面轨道精度有了更高的要求。

该研究可为低轨卫星相关的空间信号测距误差分析及低轨完好性研究提供支持。

参考文献：

[1] Department O. GPS and its Augmentation Systems, 2008, 35(2): 197
[2] Montenbruck O, Steigenberger P, Hauschild A. Advances in Space Research, 2018, 61(12): 3020
[3] Warren D L, Raquet J F. GPS Solutions, 2003, 7(3): 151
[4] Montenbruck O, Steigenberger P, Hauschild A. Gps Solutions, 2015, 19(2): 321
[5] Yang J H, Song Y Z, Chang Z Q, et al. SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica, 2021, 51(1): 9508
[6] Montenbruck O, Steigenberger P, Hauschild A. 2020 IEEE/ION PLANS, 2020: 407
[7] 贾小林, 陶清瑞, 王利军, 等. 测绘科学, 2021, 46(1): 62
[8] Chen J P, Hu X G, Tang C P, et al. Science China: Physics, Mechanics and Astronomy, 2020, 63(6): 105
[9] 陶清瑞, 贾小林, 王利军, 等. 测绘工程, 2021, 30(1): 24
[10] Heng L, Gao G X, Walter T, Enge P. Proceedings of ION ITM, San Diego: ION, 2011: 312
[11] Chen L, Jiao W, Huang X, et al. CSNC, 2013, 243: 423
[12] Wang K, El-Mowafy A, Rizos C. GPS Solutions, 2021, 26(1): 1
[13] Mistrapau F, Bija B, Cueto-Felgueroso G, et al. Portland, Oregon: ION, 2016: 1793
[14] Hauschild A, Montenbruck O. Navigation, 2021, 68(2): 419
[15] Zhao X L, Zhou S S, Ying C, et al. GPS Solutions, 2020, 24(4): 102
[16] 杨文翰, 花国良, 冯岩, 等. 天地一体化信息网络, 2021, 2(1): 9
[17] Glaser S, Michalak G, Mnnel B, et al. Journal of Geodesy, 2020, 94(12): 1

Determination of Projection Coefficients for SISRE of LEO Constellations

TIAN Qiu-ning[1], CAO Yue-ling[2], YANG Jian-hua[2,3], LIU Jin-huo[2,3], XIANG Yu[4], YANG Zuo[4], LV Hao[4], PENG Han-bin[4]

(1.Beijing Research Institute of Telemetry, Beijing 10076, China; 2.Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Science, Shanghai 200030, China; 3. University of Chinese Academy of Sciences,Beijing 100049,China; 4. Beijing Satellite Navigation Center, Beijing 100094, China)

Abstract: With the continuous advancement of Low-Earth Orbiting (LEO) constellation construction, the calculation of signal in space range error (SISRE) of satellites is not limited to Global Navigation Satellite System (GNSS) ground users, but also includes GNSS LEO users and ground users of LEO navigation systems. In order to calculate SISRE with respect to the LEO constellations, we study the method to calculate the projection coefficients of SISRE both of GNSS-LEO users and LEO-ground users. The results indicate that the error

projection coefficient of GNSS-ground users is not suitable for GNSS-LEO users and LEO-ground users. When the orbital height of LEO satellite decreased from 2 000 km to 300 km, the orbital radial error projection coefficient of GNSS-LEO users increased from 0.96 to 0.98, and the orbital tangent plane error projection coefficient decreased from 0.20 to 0.15; The orbital radial error projection coefficient of LEO-ground users decreased from 0.72 to 0.37, and the orbital tangent plane error projection coefficient increased from 0.49 to 0.66. The research results are contributed to provide valuable references for the calculation of SISRE with respect to the LEO navigation constellations in the future.

Key words: GNSS; low-earth orbiting constellation; signal in space range error; error projection coefficient